TITLE:

微分型式の環と双曲性 (幾何学における大域的解析学)

AUTHOR(S):

飯高, 茂

CITATION:

飯高, 茂. 微分型式の環と双曲性 (幾何学における大域的解析学). 数理解析研究所講究録 1978, 321: 88-100

ISSUE DATE:

1978-03

URL:

http://hdl.handle.net/2433/104016

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI

Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
321巻 1978年 88-100

微分型式の環と双曲性

東京大学 理　　飯高 茂

§1. 以下 $k=\mathbb{C}$ とおき，代数多様体，正則写像等は k スキームの圏でのそれと理解することにしよう．

V を n 次元代数多様体とすると，その上の対数的 i 型式は有限次元のベクトル空間 $T_i(V)$ を形成する．$T_i(V)$ の次元は，V の対数的 i 不正則数とよばれ $\bar{q}_i(V)$ で記される．$\bar{q}_1$ を $\bar{q}$ とかき，対数的不正則数とよぶ．さて，$\wedge^i T_1(V)$ から $T_i(V)$ に自然な写像ができるから，その像を $A_i(V)$ で書く．$A_1(V)=T_1(V)$ であり $A_0(V)=k$ とおけば $\oplus A_i(V)$ は次数環となる．かくしてえた環を $A(V)$ で示そう．これが標題に書いた微分型式の環であり，V の日輪代数 (solar algebra) とよぶことにしたい．

さて，一般に次数環 $A=\oplus A_j$ は次の条件を満たすとき，抽象日輪代数とよばれる．

1) $A_0=k$，A_1 は有限次元

ii) A_1 は $A_+ = \bigoplus_{i>0} A_j$ と生成する,

iii) A は次数環として交代的. 即ち, $u \in A_i$, $v \in A_j$ とるとき, $uv = (-1)^{ij} vu$.

典型的な例は外積代数 $\Lambda^{\cdot}(E)$ であって, これが最も普遍的である. 即ち, $\Lambda^{\cdot}(A_1) \longrightarrow A$ に自然な全射ができるので, 同次イデアル I ($I_0 = I_1 = 0$) によって,

$$\Lambda^{\cdot}(A_1)/I \xrightarrow{\sim} A$$

なる同型ができる. $A_n = 0$ なら $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = 0$ であり, $\delta(A) = \max\{n ; A_n \neq 0\}$ とおくと, A の不変量をえる. A を一つの太陽系とみたてるとき, $\delta(A)$ はその惑星の数にあたる. さて, 日輪代数 A, B の与えられたとき, 日輪代数としての最も不変的な積は次式で与えられる. 即ち,

$$\Lambda^{\cdot}(B_1)/J \xrightarrow{\sim} B$$

と B を表わすと, 日輪代数 $\Lambda^{\cdot}(A_1 \oplus B_1)/(I, J)$ がそれである. これを $A \odot B$ で表わし, A と B の日輪積 (solar product) とよぶ. 次の性質は容易にわかる : $n = \delta(A)$, $m = \delta(B)$ とおくとき,

$$A_n \otimes B_m \xrightarrow{\sim} A_n \cdot B_m \subset (A \odot B)_{n+m}$$

これにより,

$$\delta(A \odot B) = \delta(A) + \delta(B)$$

をえる.

A_1 の元 $u_1,\cdots,u_{n+1}$ ($n=\delta(A)$ として) の与えられたとき、次の略記法を使う:

$$\hat{u}_1 = u_2\cdots u_{n+1},\quad \hat{u}_2 = u_1 u_3\cdots u_{n+1},\quad \cdots,\quad \hat{u}_{n+1} = u_1\cdots u_n.$$

これらは A_n の元である。さて、

A が非退化とは、$\hat{u}_1,\cdots,\hat{u}_{n+1}$ が1次独立となるような A_1 の元 $u_1,\cdots,u_{n+1}$ の存在することと、と定義しよう。

このとき、$u_1,\cdots,u_{n+1}$ に1次変換して $v_1,\cdots,v_{n+1}$ をえても $\hat{v}_1,\cdots,\hat{v}_{n+1}$ は、同じく、1次独立である。従って、$u_1,\cdots,u_{n+1}$ らのはる $n+1$ 次元のベクトル空間 $E\subset A_1$ を考え、

$\hat{E} = \{\sum u_{j_1}\cdots u_{j_n}\ ;\ u_{j_i}\in E\}$ とおけば、$\dim\hat{E} = n+1$ といいかえられる。

A, B が非退化なら $A\odot B$ も非退化である。

実際、定義に合致した $u_1,\cdots,u_{n+1}\in A_1$, $v_1,\cdots,v_{m+1}\in B_1$ をとるとき、$u_1,\cdots,u_n, v_1,\cdots,v_m, u_{n+1}+v_{m+1}$ とおくと

$$\hat{u}_1 = \pm\,\hat{u}_1\cdot\hat{v}_{m+1},\quad \cdots,\quad \hat{u}_n = \pm\,\hat{u}_n\,\hat{v}_{m+1},\quad \hat{v}_1 = \pm\,\hat{u}_{n+1}\cdot\hat{v}_1,$$
$$\cdots,\quad (u_{n+1}+v_{m+1})^{\wedge} = \hat{u}_{n+1}\cdot\hat{v}_{n+1}$$

をえる。テンソル積との同型を用いれば、左辺の1次独立性は明らか。

しかし、一般に逆は成立しない。

命題1. A' を $\delta(A')>0$ の外積代数とする。このとき、$A\odot B$ は必ず非退化でない。

証明 $n=\delta(A)$, $m=\delta(B)$ とおき, $\varphi_1 \in A_1 \oplus B_1, \cdots,$ $\varphi_{n+m+1} \in A_1 \oplus B_1$ ととり, $\varphi_j = u_j + v_j$ と $u_j \in A_1$, $v_j \in B_1$ により表わし, $\sum k u_j$ の底を $u_1, \cdots, u_r$ としよう. さて, A は外積代数だから, $r \leq n = \dim A_1 = \delta(A)$ である. $j > r$ について, $u_j = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{ij} u_i$ と書こう. $\psi_j = \varphi_j - \sum_{i=1}^{r} \lambda_{ij} \varphi_i$ とおくと, $\dim \sum_{j=1} k\psi_j = \dim \sum_{j=1} k\varphi_j$. しかし, $\psi_{r+1} \in B_1, \cdots, \psi_{n+m+1} \in B_1$ であって, $n+m+1-(r+1)+1 = n+m-r+1 \geq m+1$. ゆえに,

$$\widehat{\psi_1} = \psi_2 \cdots \psi_{n+m+1} = \cdots \psi_{r+1} \cdots \psi_{n+m+1} = 0.$$

これは, $\widehat{\varphi_1}, \cdots, \widehat{\varphi_{n+m+1}}$ が1次独立にならぬことを意味する.

さて, 代数多様体 V があって $A(V)$ としてえられる日輪代数を, 幾何的ということにしよう.

問題. 日輪代数はいつ幾何的か?

例. $V = \mathbb{C}^{*n} - V(f)$ (f は既約) としよう. すると,

$A_1(V) = \sum k\, dx_j/x_j + k\, df/f$.

$df/f = \sum (x_j \partial_j f) e_j / f$, $e_j = dx_j/x_j$

と表わされるから, $e_{n+1} = df/f$ として,

$\widehat{e_{n+1}} = e_1 \cdots e_n$ ($= \rho$ と記す),

$\widehat{e_j} = x_j \partial_j f / f\, \rho$.

よって，

$\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_{n+1}$ が1次従属 $\Leftrightarrow$ $\sum a_j x_j \partial_j f = f$

$\Leftrightarrow$ f は準同次式．

従って，

$A(V)$ が非退化 $\Leftrightarrow$ f は準同次式でない，

が成立する．

上の $A(V)$ について $\Lambda^{\cdot}(A_1)/I \to A(V)$ となるイデアルは，$j < n+1$ について $I_j = 0$，そして $I_{n+1} = k$．

例2．V を $\mathbb{P}^n$ から超平面 $L_0, \cdots, L_q$ をとり去った残りとしよう．すると，$A_j(V) = T_j(V)$ が成立つ（青木，Brieskorn）

§2. V, Wを代数多様体とするとき、強有理写像 $\phi: V \longrightarrow W$ に対して $\phi^*: A(W) \longrightarrow A(V)$ が定まる。ϕ^*を $A(\phi)$ とかくと、$(A(V), A(\phi))$ は関手となる。さて、

ϕが非常に一般でも $A(\phi)$ は同型になりうる。

命題2 i) ϕ が支配的なら　ϕ^* は単射

ii) さらに $\bar{q}(V) = \bar{q}(W)$ なら ϕ^*は同型。

証明. i)は $T_i(W) \longrightarrow T_i(V)$ がすでに同型なので自明

さて, ii) をみよう. $\bar{q}(V) = \bar{q}(W)$ により $A_1(W) \xrightarrow{\sim} A_1(V)$ である $A_i(V)$ は $A_1(V)$ の元より生成されるから、自動的に $A_i(W)$ の像になる。

とくに $A(V)$ は固有(弱)双有理不変量である。さて、各 jにつき $\bar{q}_j(V) = \dim A_j(V)$ とおこう。一の意味は、$q_j(V) = \bar{q}_j(\bar{V})$ ($\bar{V}$はVの完備化) とおきたいから、やはり対数的の形容詞の略である。

さて、Vには準Albanese写像 $\alpha_V: V \longrightarrow \mathcal{A}_V$ が存在したのだった。ここに $\mathcal{A}_V$ はVの準Albanese多様体をさす。Vが非特異なら、α_Vは正則。一般には α_V は強有理写像である。さて $\alpha_V(V)$ の $\mathcal{A}_V$ 内での閉包を B_V で示そう。すると、$\bar{q}(V) = \bar{q}(B_V) = \bar{q}(\mathcal{A}_V)$ であり、$\alpha_V: V \longrightarrow B_V$ は支配的な強有理写像なのである。命題2が直ちに使えて、

$$A(B_V) \xrightarrow{\sim} A(V)$$

をえる. 即ち, $A(V)$ を調べるには, 準Abel多様体の閉部分多様体 V についてみればよいことがわかった. 次の定理を想起しよう.

定理 1 (上野 [ ]). V を準Abel多様体 $\mathcal{A}$ の閉部分多様体とし, $n=\dim V$ とおく. 次の条件は同値.

a) V は準Abel多様体,

b)$_j$ $\bar{q}_j(V)=\binom{n}{j}$ $(1\leq j\leq n)$,

c) $\bar{P}_m(V)=1$,

d) $\bar{\kappa}(V)=0$,

b)$_j^*$ $\dim A_j^0(V)=\binom{n}{j}$,

b)$_j^{**}$ $\bar{a}_j(V)=\binom{n}{j}$.

ここに $\bar{a}_j(V)$ は前に定義した通りであるが, $A_j^0(V)$ は次のように定義する.

$$A^0(V)_1=\mathrm{Image}\left(T_1(\mathcal{A})\longrightarrow T_1(V)\right)\subset A(V)_1.$$

$A^0(V)_1$ の生成する $A(V)$ の部分日輪代数を $A^0(V)$ とおく. これは無論 V の $\mathcal{A}$ への埋入にも依存する.

そして, V が一般に, 単なる閉部分多様体ならば, 各 b), c) d) で $\geq$ が成立するのである.

証明はくり返さないが, b)$_j\Rightarrow$ b)$_j^*$ (一般に $\dim A_j^0(V)\leq\bar{q}_j(V)$) だから, b)$_j^*\Rightarrow$ a) をいえば, よく, 原証明は

まさに $b_j)^* \Rightarrow a)$ をいっていることに注意すればよい.

とくに, $V \subset \mathcal{A}$ かつ $n = \dim V$ なら, $\overline{a}_n(V) \geqq 1$ であって, $\delta(V) = n$ がわかる.

ゆえに次の命題をえる.

命題 3. $\delta(A(V)) = \dim B_V$.

従って, $\delta(A(V))$ を V の Albanese 次元とよぶこともできよう.

命題 4 $A(V_1 \times V_2) \simeq A(V_1) \odot A(V_2)$.

従って,

$$A(V_1 \times V_2)_j = \sum A(V_1)_{j-i} \otimes A(V_2)_i,$$

$$\overline{a}(V_1 \times V_2)_j = \sum_{i=0}^{j} \overline{a}(V_1)_{j-i} \cdot \overline{a}(V_2)_i.$$

定理 2. V を $\mathcal{A}$ の閉部分多様体とし, $\overline{\kappa} = \overline{\kappa}(V)$ とおく. すると, $\mathcal{A}$ のエタール被覆 $\pi: \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}$ が存在し $\pi^{-1}(V) = V'$ とおくと, $V' = \mathcal{A}_1 \times W \subset \mathcal{A}' = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ と直積に分解する. $\mathcal{A}_i$ はやはり準 Abel 多様体で, $W \subset \mathcal{A}_2$ は双曲型, かつ, $\dim \mathcal{A}_1 = n - \overline{\kappa}$, $\dim W = \overline{\kappa}$.

これを用いると,

$$A(V) \simeq A(V', \mathcal{A}') = \{T_1(W) \subset T_1(V') \text{ の生成する}\}.$$

さらに，$\mathcal{A}' = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ によれば，

$$A(V', \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) = A(\mathcal{A}_1) \odot A(W, \mathcal{A}_2)$$

になる．

従って，$\dim \mathcal{A}_1 = n - \bar{\kappa}(V) > 0$ ならば，$A(V)$ は非退化にならない．よって，

定理3　$V \subset \mathcal{A}$ があり，

$A(V)$ が非退化ならば，V は双曲型，即ち $\bar{\kappa}(V) = n$

が示された．

双曲型の W が準Abel多様体 $\mathcal{A}$ の閉部分で，かつ W が $\mathcal{A}$ を生成するとき $A(W, \mathcal{A})$ を双曲型ということにすれば，一般の $A(V)$ は，外積代数と，双曲型の A の日輪積になるわけである．

もっとも，$A(W, \mathcal{A})$ などは，いささかしまりが悪いから次の定理2の変形を用いて，書き易くしておこう．

定理2*　条件は前定理と同じとしておく．射影 $\varpi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_2'$（準Abel），$\varpi^{-1}(a) = \mathcal{A}_1$ があり，$\varpi|V : V \to W'$ と分解し，$V \subset \mathcal{A}$ が α_V なら $W' \subset \mathcal{A}_2'$ も $\alpha_{W'}$ となる．そして $\varpi^{-1}(a) = \mathcal{A}_1$．$W'$ は双曲型で，$\varpi|V : V \to W'$ が，V の対数的標準ファイバー多様体．

これにより，$A(W, \mathcal{A}') = A(W')$ とする．かくて次の定理に到る

定理4.　$A(V) = \Lambda(E) \odot A(W)$.

Eはベクトル空間, $\Lambda(E)$ はEの定める外積代数, Wは $\mathfrak{A}$ 内の双曲型多様体.

かくして, 幾何的日輪代数の条件が一つ求まった. 双曲型 $A(W)$ の代数的特徴づけが次の問題になる. 非退化であればよいわけだが, これがどの位必要かは勿論わからない.

§3 V を $\mathcal{A}$ の n 次元閉部分代数多様体とするとき、$A_n(V)$ の代数幾何的意味を考察しよう。

$X=\mathcal{A}$ とおき $\overline{X}$ を $\mathcal{A}$ の標準完備化とする。$\overline{V}$ を V の $\overline{X}$ 内での閉包とする。さて、$\overline{X}$ に二次変換（モノイダル変換をこうよぶ）をくり返し、次の図式をえる

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & X \arrow[r, phantom, "\subset"] & \overline{X} \\
 & \overline{V} \arrow[ur, phantom, "\subset"] & \\
 & \arrow[u, "\mu"] & \\
V^* \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & X^* \arrow[r, phantom, "\subset"] & \overline{X}^* \\
 & \overline{V}^* \arrow[ur, phantom, "\subset"] &
\end{tikzcd}$$

$\mu:\overline{X}^*\longrightarrow\overline{X}$ は双有理正則、V^*, X^* は V, X の強変換、かつ、$\overline{V}^*$ は V^* の $\overline{X}^*$ 内での閉包。さて、μ をうまくえらぶと、$\overline{V}^*$ も非特異、$D^*=\overline{V}^*-V^*$ は単純正規交叉型因子にできる。

$$A(V)_n = A(V^*)_n \subset H^0(K^*+D^*),$$

(ここに $K^* = K(\bar{V}^*)$ は標準因子.) の定める $|K^*+D^*|$ の部分1次系があるならそれを $\mathbb{L}(V^*)$ で示す.

$\mathbb{L}(V^*)$ は, V^*の日輪代数に付属した1次系, 略して, V^*の日輪1次系という. 英語でかくと

solar (linear) system of V^*

である. 即ち, 太陽系みたいにきこえるものができた.

$\mathbb{L}(V^*)$ の定める有理写像 $\Phi : \bar{V}^* \longrightarrow \mathbb{P}^{\bar{a}_n-1}$ を日輪写像 (solar map) とよぶ. $W = \Phi(\bar{V}^*)$ とおくと, この一般ファイバーの連結成分は著しい特長をもつのである.

さて,

$$\begin{tikzcd}
\bar{V} & \bar{V}^* \arrow[l, "\mu"'] \arrow[ddr, "\Phi"] & \\
\cup & \cup & \\
V \arrow[rr, bend right] & V^* \arrow[l, "\mu"'] & W \subset \mathbb{P}^{\bar{a}_n-1}
\end{tikzcd}$$

次のようにして, 支配的強有理写像 $\Phi\mu^{-1} : V \longrightarrow W$ をえる.

$\psi = \Phi\cdot\mu^{-1}$ とかき $\psi : V \longrightarrow W$ を Vの日輪写像という.

$w \in W$ をWの一般の点とする. $\Phi^{-1}(w)$ は一般に非連結であり, その連結成分を $\bar{\Gamma}_w^*$ とかく. $\Gamma_w^* = \bar{\Gamma}_w^* \cap V^*$ とおくと, これはV^*の閉部分多様体であり $\mu|V^*$は固有正則なので, $\Gamma_w = \mu(\bar{V}_w^* \cap V^*)$ も Vの閉部分多様体である.

さて、Γ_ω は準 Abel 多様体か？

このことは、結局証明できなかった。正しいとすると、すべてが旨くいきすぎるのではあるが、十分考えている余裕がないから何ともいえない。

$A_n(V)$ の考察から、次のことも考えてみた。

1-形式の空間 $T_1(V)$ の底 $\omega_1,\dots,\omega_q$ をとり、$n=\dim V$ とするとき、$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n\neq 0$ にとれたとしよう。

$\mathcal{I}=\{I\subset\{1,\dots,q\};\#I=n\}$ とおき、$I\in\mathcal{I}$ に対して、$\omega_I=\bigwedge_{i\in I}\omega_i$ とおくと、$\omega_I=\rho_I\,\omega_{[1,\dots,n]}$ として、有理関数 ρ_I が定まる。

$$
\begin{array}{ccc}
V & \longrightarrow & \mathbb{P}^{\rho} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \\
p & \longmapsto & (\cdots:\rho_I:\cdots)
\end{array}
$$

とおくと、一つの有理写像をえる。これは、実質上前の王と同じになる。このような有理写像の詳しい研究は是非とも望まれる。

そして、次の事も、一般に検証できなかった。

問題　$V\subset\mathcal{A}$ が双曲型のとき $A(V)$ は非退化か？

これは、落合・野口の問である。